RİYAZİYYAT

УДК 519. 62/.642

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА

З.Ф.ХАНКИШИЕВ
Бакинский Государственный Университет
hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе исследуется одна задача для линейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа с переменными коэффициентами методом прямых. После применения метода прямых, исследуемая задача сводится к решению задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Работа в основном посвящена исследованию сходимости решения полученной новой задачи к решению исходной. Найдены условия, при которых решение новой задачи сходится к решению исходной задачи и определена скорость сходимости.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, метод прямых, принцип максимума.

1. Постановка задачи

Пусть требуется найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b(x,t)u(x,t) + \int_0^l c(x,t)u(x,t)\,dx + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T\ , \quad (1)$$

граничным условиям

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T\ , \quad (2)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l\ . \quad (3)$$

Здесь $k(x,t) > 0,\ b(x,t),\ c(x,t),\ f(x,t)$ и $\varphi(x)$ - непрерывные функции своих аргументов.

Отметим, что большое число задач естествознания, например, некоторые задачи математической физики и биологии, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой и т. д. приводят к подобным задачам.

2. Применение метода прямых

Пусть $N \geq 2$ - фиксированное натуральное число. Разделим отрезок $[0,l]$ на N равных частей и точки деления обозначим через $x_n = nh,\ n = 0,1,...,N,\ Nh = l$.

Рассмотрев уравнение (1) на прямых $x = x_n$, $n = 1,2,...,N-1$, получим:

$$\frac{\partial u(x_n,t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{x=x_n} + b(x_n,t)\,u(x_n,t) + \int_0^l c(x,t)\,u(x,t)\,dx + f(x_n,t),$$

$n = 1,2,...,N-1, 0 < t \leq T.$

Заменив частную производную $\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{x=x_n}$ соответствующим разностным выражением и применив метод трапеций к интегралу $\int_0^l c(x,t)\,u(x,t)\,dx$, приходим к равенствам

$$\frac{\partial u(x_n,t)}{\partial t} = \frac{1}{h}\left[\frac{k(x_{n+1},t)+k(x_n,t)}{2}\frac{u(x_{n+1},t)-u(x_n,t)}{h} - \frac{k(x_n,t)+k(x_{n-1},t)}{2}\frac{u(x_n,t)-u(x_{n-1},t)}{h}\right] +$$

$$+ b(x_n,t)u(x_n,t) + h\big(c(x_1,t)u(x_1,t) + c(x_2,t)u(x_2,t) + ... + c(x_{N-1},t)u(x_{N-1},t)\big) + f(x_n,t) + O\big(h^2\big),$$

$n = 1,2,...,N-1.$

Отбрасывая в этих равенствах слагаемые порядка $O\big(h^2\big)$, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = \frac{1}{h}\left[\frac{k(x_{n+1},t)+k(x_n,t)}{2}\frac{y_{n+1}(t)-y_n(t)}{h} - \frac{k(x_n,t)+k(x_{n-1},t)}{2}\frac{y_n(t)-y_{n-1}(t)}{h}\right] +$$

$$+ b_n(t)\,y_n(t) + h\big(c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + ... + c_{N-1}(t)y_{N-1}(t)\big) + f_n(t),$$

$$n = 1,2,...,N-1,\ 0 < t \leq T. \tag{4}$$

Здесь $b_n(t) = b(x_n, t),\ c_n(t) = c(x_n, t),\ f_n(t) = f(x_n, t)$, а через $y_n(t)$ обозначено приближенное значение $u(x_n, t)$.

Из граничных и начальных условий (2) и (3) имеем:

$$y_0(t) = 0,\ \ y_N(t) = 0,\ \ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$y_n(0) = \varphi(x_n),\ \ n = 0,1,...,N. \tag{6}$$

3. Решение задачи (4)-(6)

Задачу (4)-(6) можно решить различным способом. В этой работе мы будем пользоваться вариантом метода прогонки, предложенным в [1]. С этой целью задачу (4)-(6) перепишем в матричном виде

$$y'(t) + p(t)y(t) = F(t),\ \ 0 < t \le T\ , \tag{7}$$

$$\psi_0^* y(0) = \varphi_0\,. \tag{8}$$

Здесь

$$p(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & ... & a_{1,N-3}(t) & a_{1,N-2}(t) & a_{1,N-1}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & ... & a_{2,N-3}(t) & a_{2,N-2}(t) & a_{2,N-1}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & ... & a_{3,N-3}(t) & a_{3,N-2}(t) & a_{3,N-1}(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{N-2,1}(t) & a_{N-2,2}(t) & a_{N-2,3}(t) & ... & a_{N-2,N-3}(t) & a_{N-2,N-2}(t) & a_{N-2,N-1}(t) \\ a_{N-1,1}(t) & a_{N-1,2}(t) & a_{N-1,3}(t) & ... & a_{N-1,N-3}(t) & a_{N-1,N-2}(t) & a_{N-1,N-1}(t) \end{Vmatrix},$$

$F(t) = \begin{Vmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ... \\ f_{N-2}(t) \\ f_{N-1}(t) \end{Vmatrix}$, $\varphi_0 = \begin{Vmatrix} \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \\ ... \\ \varphi(x_{N-2}) \\ \varphi(x_{N-1}) \end{Vmatrix}$, ψ_0 - единичная матрица размерности $(N-1)\times(N-1)$,

$$a_{nn}(t) = \frac{k(x_{n+1}, t) + 2k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2h^2} - b_n(t) - hc_n(t),\ n = 1,2,...,N-1;$$

$$a_{n+1,n}(t) = -\frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2h^2} - hc_n(t),\ n = 1,2,...,N-2;$$

$$a_{n,n+1}(t) = -\frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2h^2} - hc_{n+1}(t),\ n = 1,2,...,N-2;$$

$$a_{in}(t) = -hc_n(t),\ \ i = 1,2,...,N-3;\ n = i+2, i+3,...,N-1;$$

$a_{i\,n}(t) = -hc_n(t),\ i = 3,4,...,N-1,\ n = 1,2,...,i-2.$

В предложенном варианте метода прогонки, перенесенное в точку $t \in (0,T]$, условие (8) записывается в виде

$$\psi^*(t)y(t) = \beta(t), \tag{9}$$

где $\psi(t)$ - матрица размерности $(N-1)\times(N-1)$, $\beta(t)$ - вектор-столбец высоты $N-1$, и они определяются как решение задач

$$\psi' + \psi\left(\psi^*\psi\right)^{-1}\psi^* p^*\psi - p^*\psi = 0\,, \tag{10}$$

$$\psi(0) = \psi_0\,, \tag{11}$$

и

$$\beta' + \psi^* p\psi\left(\psi^*\psi\right)^{-1}\beta = \psi^* F\,, \tag{12}$$

$$\beta(0) = \varphi_0\,. \tag{13}$$

Уравнения (10) и (12) нелинейные. Но решения последних задач для этих уравнений можно найти с достаточной точностью, разлагая их по степеням t и учитывая при этом справедливость равенства $\psi^*(t)\cdot\psi(t) = \psi_0^*\cdot\psi_0$. Это равенство с одной стороны упрощает вычисления коэффициентов решений $\psi(t)$ и $\beta(t)$, с другой стороны дает возможность контролировать процесс вычисления.

4. Принцип максимума и следствия, полученные из этого принципа

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (4) и перепишем ее в виде

$$\frac{dy_n(t)}{dt} - \frac{1}{h}\left[\frac{k(x_{n+1},t)+k(x_n,t)}{2}\frac{y_{n+1}(t)-y_n(t)}{h} - \frac{k(x_n,t)+k(x_{n-1},t)}{2}\frac{y_n(t)-y_{n-1}(t)}{h}\right] -$$

$$-b_n(t)\,y_n(t) - h\big(c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + ... + c_{N-1}(t)y_{N-1}(t)\big) = f_n(t),$$

$$n = 1,2,...,N-1,\ 0 < t \le T. \tag{14}$$

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть функции $y_n(t), n = 0,1,..., N$ удовлетворяют уравнениям (14). Пусть выполняются условия $f_n(t) \le 0\ \ (f_n(t) \ge 0),\quad 0 < t \le T,\ n = 1,2,...,N-1$. Если

$$c(x,t) \ge 0,\ \inf_{0<x\le l,\ 0<t\le T}\big(-b(x,t)\big) \ge l\cdot \sup_{0\le x\le l,\,0<t\le T} c(x,t)\,, \tag{15}$$

то решение $y_n(t),\ n = 1,...,N-1,$ системы (14), отличное от постоянной, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в интервале $t \in (0,T]$ при $n = 1,...,N-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f_n(t) \le 0,\ \ 0 < t \le T,\ \ n = 1,2,...,N-1$, и существует точка $t_0 \in (0,T]$, в которой решение уравнения (14) принимает наибольшее положительное значение при $n = n_0$, $0 < n_0 < N$:

$$y_{n_0}(t_0) = \max_{0 \le t \le T,\, 0 < n < N} y_n(t) = M > 0.$$

Не уменьшая общности, можем считать, что $y_{n_0-1}(t_0) < y_{n_0}(t_0)$.

Рассмотрев уравнение (14) при $n = n_0$, в точке $t = t_0$, при наших предположениях имеем:

$$f_{n_0}(t_0) = \frac{dy_{n_0}(t_0)}{dt} - \frac{1}{h}\left[\frac{k(x_{n_0+1},t_0) + k(x_{n_0},t_0)}{2}\frac{y_{n_0+1}(t_0) - y_{n_0}(t_0)}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{k(x_{n_0},t_0) + k(x_{n_0-1},t_0)}{2}\frac{y_{n_0}(t_0) - y_{n_0-1}(t_0)}{h}\right] - b_{n_0}(t_0)\, y_{n_0}(t_0) -$$

$$- h\big(c_1(t_0)y_1(t_0) + c_2(t_0)y_2(t_0) + \ldots + c_{N-1}(t_0)y_{N-1}(t_0)\big) > -b_{n_0}(t_0)M -$$

$$- h\big(c_1(t_0) + c_2(t_0) + \ldots + c_{N-1}(t_0)\big)M \ge \left[\inf_{0<x<l,\,0<t\le T}\big(-b(x,t)\big) - l \cdot \sup_{0\le x\le l,\,0<t\le T} c(x,t)\right]M \ge 0,$$

т.е. $f_{n_0}(t_0) > 0$, что противоречит условию $f_{n_0}(t_0) \le 0$.

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

Теорема 2. Пусть правые части уравнений (14) удовлетворяют условиям $f_n(t) \ge 0$ $(f_n(t) \le 0)$, $n = 1,2,\ldots,N-1$, $0 < t \le T$. Если $y_0(t) \ge 0$, $y_N(t) \ge 0$, $y_n(0) \ge 0$, $n = 1,2,\ldots,N-1$, и выполняются условия (15), то $y_n(t) \ge 0$ $(y_n(t) \le 0)$, $n = 0,1,\ldots,N$, $0 \le t \le T$.

Следствие. Пусть выполняются условия (15). Тогда однородная система дифференциальных уравнений, соответствующая системе (14) при однородных граничных и начальных условиях имеет только тривиальное решение $y_n(t) = 0$, $n = 0,1,\ldots,N$.

Теорема 3 (Теорема сравнения). Пусть $y_n(t), n = 0,1,\ldots,N$ - решение задачи (4)-(6), а $\tilde{y}_n(t), n = 0,1,\ldots,N$ - решение задачи, полученной при замене в (4)-(6) функций $f_n(t)$, $n = 1,2,\ldots,N-1$ и $\varphi(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots,N$, соответственно, на $\tilde{f}_n(t)$, $n = 1,2,\ldots,N-1$ и $\tilde{\varphi}(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots,N$. Тогда, если выполняются условия $|f_n(t)| \le \tilde{f}_n(t)$, $n = 1,2,\ldots,N-1$, $0 < t \le T$, и $|\varphi(x_n)| \le \tilde{\varphi}(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots,N$, то при выполнении условий (15) имеет место неравенство $|y_n(t)| \le \tilde{y}_n(t)$, $n = 0,1,\ldots,N$, $0 \le t \le T$.

5. Сходимость

Пусть $u(x_n,t)$ - значение точного решения задачи (1)-(3) на прямой $x = x_n$, $y_n(t)$ - решение задачи (4)-(6). Введем вспомогательную функцию

$$z_n(t) = y_n(t) - u(x_n,t),\ n = 0,1,...,N. \tag{16}$$

Для этой функции получим:

$$\frac{dz_n(t)}{dt} = \frac{1}{h}\left[\frac{k(x_{n+1},t)+k(x_n,t)}{2}\frac{z_{n+1}(t)-z_n(t)}{h} - \frac{k(x_n,t)+k(x_{n-1},t)}{2}\frac{z_n(t)-z_{n-1}(t)}{h}\right] +$$
$$+ b_n(t)z_n(t) + h\big(c_1(t)z_1(t) + c_2(t)z_2(t) + ... + c_{N-1}(t)z_{N-1}(t)\big) + h^2R_n(t),$$
$$n = 1,2,...,N-1,\ 0 < t \le T. \tag{17}$$

$$z_0(t) = 0, \quad z_N(t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{18}$$
$$z_n(0) = 0, \quad n = 0,1,2,...,N. \tag{19}$$

Используя формулу Тейлора и остаточный член формулы трапеций, легко можно показать, что

$|R_n(t)| \le L$, где $L = \frac{2}{3}KM_1 + \frac{l}{12}M_2$, $K = \sup\limits_D\{|k(x,t)|, |k'_x(x,t)|, |k''_x(x,t)|, |k'''_x(x,t)|\}$,

$M_1 = \sup\limits_D\{|u'_x(x,t)|, |u''_x(x,t)|, |u'''_x(x,t)|, |u^{IV}_x(x,t)|\}$,

$M_2 = \sup\limits_{0<x<l,\,0<t\le T}\left|\big(c(x,t)u(x,t)\big)''_{xx}\right|$,

если решение $u = u(x,t)$ уравнения (1) имеет в области $D = \{0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ ограниченные частные производные по x до четвертого, функция $k(x,t)$ ограниченные частные производные по x до третьего, а функция $c(x,t)$ ограниченные частные производные по x до второго порядка, включительно.

Пусть

$$\tilde{z}_n(t) = Lh^2\xi(l - x_n),\ n = 0,1,...,N. \tag{20}$$

Здесь $L > 0$, $\xi > 0$ - постоянные. Очевидно, что функция $\tilde{z}_n(t)$ есть неотрицательная функция. Для этой функции после элементарных преобразований имеем:

$$\frac{d\tilde{z}_n(t)}{dt} - \frac{1}{h}\left[\frac{k(x_{n+1},t)+k(x_n,t)}{2}\frac{\tilde{z}_{n+1}(t)-\tilde{z}_n(t)}{h} - \frac{k(x_n,t)+k(x_{n-1},t)}{2}\frac{\tilde{z}_n(t)-\tilde{z}_{n-1}(t)}{h}\right] -$$
$$- b_n(t)\tilde{z}_n(t) - h\big(c_1(t)\tilde{z}_1(t) + c_2(t)\tilde{z}_2(t) + ... + c_{N-1}(t)\tilde{z}_{N-1}(t)\big) = Lh^2\xi\,\frac{k(x_{n+1},t)-k(x_{n-1},t)}{2h} -$$

$$-Lh^2\xi\left[b_n(t)\left(l-x_n\right)+h\cdot\left(c_1(t)(l-x_1)+c_2(t)(l-x_2)+...+c_{N-1}(t)(l-x_{N-1})\right)\right]=$$
$$=Lh^2\xi\cdot k'_x\left(\bar{x}_n,t\right)-Lh^2\xi\left[b_n(t)\left(l-x_n\right)+h\cdot\left(c_1(t)(l-x_1)+c_2(t)(l-x_2)+...+\right.\right.$$
$$\left.\left.+c_{N-1}(t)(l-x_{N-1})\right)\right]\geq Lh^2\xi\cdot k'_x\left(\bar{x}_n,t\right)-Lh^2\xi l\left[\sup_{0<x<l,0<t\leq T}b(x,t)+l\cdot\sup_{0\leq x\leq l,0<t\leq T}c(x,t)\right]\geq$$
$$\geq Lh^2\xi\cdot\left[\inf_{0<x<l,0<t\leq T}k'_x(x,t)-l\cdot\sup_{0<x<l,0<t\leq T}b(x,t)-l^2\sup_{0\leq x\leq l,0<t\leq T}c(x,t)\right].$$

Пусть

$$\inf_{0<x<l,0<t\leq T}k'_x(x,t)-l\cdot\sup_{0<x<l,0<t\leq T}b(x,t)-l^2\sup_{0\leq x\leq l,0<t\leq T}c(x,t)\geq\varepsilon>0. \quad (21)$$

Тогда имеем:

$$\frac{d\tilde{z}_n(t)}{dt}-\frac{1}{h}\left[\frac{k(x_{n+1},t)+k(x_n,t)}{2}\frac{\tilde{z}_{n+1}(t)-\tilde{z}_n(t)}{h}-\frac{k(x_n,t)+k(x_{n-1},t)}{2}\frac{\tilde{z}_n(t)-\tilde{z}_{n-1}(t)}{h}\right]-$$
$$-b_n(t)\tilde{z}_n(t)-h\left(c_1(t)\tilde{z}_1(t)+c_2(t)\tilde{z}_2(t)+...+c_{N-1}(t)\tilde{z}_{N-1}(t)\right)\geq Lh^2\xi\varepsilon\geq Lh^2,$$
$$n=1,2,...,N-1,\ 0<t\leq T, \quad (22)$$

если $\xi\geq\dfrac{1}{\varepsilon}$.

С другой стороны имеем:

$$\tilde{z}_0(t)=Lh^2\xi l>0,\qquad z_N(t)=0,\quad 0\leq t\leq T, \quad (23)$$
$$\tilde{z}_n(0)=Lh^2\xi(l-x_n)\geq 0,\ n=0,1,...,N. \quad (24)$$

Тогда сравнивая задачу (17)-(19) с задачей (22)-(24), в силу теоремы сравнения имеем:

$$\left|z_n(t)\right|\leq\tilde{z}_n(t),\quad n=0,1,...,N,$$

или

$$\left|y_n(t)-u(x_n,t)\right|\leq Lh^2\xi l,\ n=0,1,...,N. \quad (25)$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 4. Пусть коэффициенты $k(x,t)$, $b(x,t)$ и $c(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяют условию (21). Если выполняется условие $\xi\geq\dfrac{1}{\varepsilon}$, то решение задачи (4)-(6) сходится к решению задачи (1)-(3). При этом имеет место оценка (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961, 1, № 3, с.542-545.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301с.

3. Ханкишиев З.Ф. Применение метода прямых к решениям задач для нагруженных уравнений. Методы решения и исследования сходимости. Deutschland, Saarbrücken, 2013, 152 с.
4. Ханкишиев З.Ф. Исследование сходимости метода прямых при решении одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2013, №1, с.18-23.

PARABOLİK TİP XƏTTİ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ DÜZ XƏTLƏR ÜSULUNUN TƏTBİQİ VƏ HƏLLİN YIĞILMASININ TƏDQİQİ

Z.F.XANKİŞİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə dəyişən əmsallı parabolik tip xətti inteqro-diferensial tənlik üçün bir məsələ düz xətlər üsulu ilə tədqiq edilir. Düz xətlər üsulunun tətbiqi nəticəsində məsələ bir tərtibli xətti adi diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinə gətirilir. İş, əsasən, düz xətlər üsulunun tətbiqi nəticəsində alınan yeni məsələnin ilkin məsələnin həllinə yığılmasının tədqiqinə həsr olunub. Müəyyən şərtlər daxilində düz xətlər üsulunun yığılması isbat olunub və yığılma sürəti təyin edilib.

Açar sözlər: inteqro-diferensial tənliklər, düz xətlər üsulu, maksimum prinsipi.

APPLICATION OF THE METHOD OF STRAIGHT LINES TO THE SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF PARABOLIC TYPE AND INVESTIGATION OF THE CONVERGENCE OF THE METHOD

Z.F.KHANKISHIYEV

SUMMARY

The present work investigates one problem by the method of straight lines for a linear integro-differential equation of parabolic type with variable coefficients. After application of the method of straight lines the investigated problem is reduced to the solution of Cauchy problem for the system of ordinary differential equations of first order. Generally, this work is devoted to the investigation of the convergence of the solution of the obtained new problem to the solution of the given problem. The convergence of the method is proved and the convergence rate is defined.

Key words: integro-differential equations, method of straight lines, maximum principle

Поступила в редакцию: 01.10.2014 г.
Подписано к печати: 13.02.2015 г.